A História da Ciência e o ensino da recursividade: as torres de Hanói

Eli Banks Liberato da Costa

INTRODUÇÃO

A técnica da Recursividade, vem sendo largamente utilizada na programação de computadores, na maioria das vezes simplificando de forma marcante as soluções de problemas aparentemente complexos.

Por outro lado, também é possível que a aplicação dessa técnica torne a solução muito difícil de ser compreendida, muitas vezes pela sua extrema simplicidade. Afirmamos também que sempre é mais fácil distinguirmos o que está explícito ao invés daquilo que permanece de forma implícita. O uso da técnica da recursividade nem sempre é naturalmente visível e claramente deduzido.[1]

Este trabalho tem como objetivo apresentar essa técnica do ponto de vista de sua utilização na informática. A recursividade (ou recursão) é um conceito muito mais amplo e abrangente estando presente nas mais diferentes aplicações, tais como: literatura, jogos, matemática, experimentos físicos, etc.

A História da Ciência colabora com a abordagem deste tema ao destacar e analisar fatos que envolveram o processo de busca de soluções para um determinado problema. A História da Ciência nos possibilita um olhar para o passado, observando um contexto diferente do atual, e principalmente, como e com que recursos, o problema em questão foi enfrentado. Nos dias de hoje com o auxílio do computador, disponibilizou-se uma poderosa ferramenta que executa rapidamente operações repetitivas e exaustivas, abrindo possibilidades de técnicas anteriormente de difícil implementação; a recursividade é uma delas.

Oficina apresentada no Workshop de História da Ciência e Ensino, 26/09/2008, *campus* Marquês de Paranaguá, PUCSP.

[1] A. J. S. Neto, "Explorando Recursão e Fractals," in *IV Congresso RIBIE, Brasília 1998* (Petrópolis:Universidade Católica de Petrópolis, 1998), 3.

Apresentaremos o problema das Torres de Hanói, num contexto histórico, suas soluções e limitações, procurando comparar as abordagens antiga e moderna.

O QUE É RECURSIVIDADE

No contexto que pretendemos tratar sobre esse assunto, e de uma forma simplificada, podemos dizer que recursividade é uma técnica de programação de computadores na qual uma rotina (entenda-se um programa, ou parte dele) ao ser executada, chama novamente ela mesma, não necessariamente apenas uma vez; esta segunda chamada, também chamará uma terceira que chamará a quarta, e assim por diante.[2]

Quando um procedimento qualquer é executado por um computador, e no decorrer desse processamento for encontrado novamente o mesmo procedimento, dizemos que o mesmo é "recursivo", isto é: recursão é o ato de um procedimento chamar a si mesmo[3].

Por exemplo: ao calcular uma multiplicação através de somas sucessivas, ao invés do programa ser constituído de uma sequência de somas sequenciais ou formar um laço com um contador (programação em loop)[4], usando a recursividade podemos fazer com que a própria rotina contendo apenas 1 soma, chame ela mesma uma quantidade controlada de vezes.

Se sairmos do contexto da programação dos computadores, podemos apresentar inúmeros exemplos de recursividade, como por exemplo: 2 espelhos colocados um na frente do outro: as infinitas imagens refletidas mostram essa mesma ideia: a repetição sucessiva de um processo que se refere a si mesmo.

Um aluno já disse que:

---

[2] A. Drozdek, *Estrutura de Dados e Algoritmos em C++* (São Paulo: Thomson, 2002), 153-156.
[3] M. T. Goodrich & R. Tamassia, *Estruturas de Dados e Algorítmos em Java.* 4ª ed. (São Paulo: Bookman, 2007), 136.
[4] Loop: Técnica de programação que repete a execução de uma determinada rotina mais de uma vez.

> Ao tentar resolver um problema, encontrei obstáculos dentro de obstáculos. Por isso, adotei uma solução recursiva"[5]

Outro aluno, que resolveu permanecer no anonimato, nos deixou a seguinte frase:

> Para entender recursão devemos primeiramente entender recursão"[6]

O PROBLEMA DAS TORRES DE HANÓI

As Torres de Hanói constituem um problema tipo "quebra-cabeça" de origem muito antiga inspirada em uma lenda hindu que falava de um templo em Bernares, cidade sagrada da Índia onde existiam 3 torres sagradas do bramanismo. A lenda dizia que no início dos tempos, foi dado aos monges uma pilha de 64 discos de ouro de diâmetros diferentes e com um furo no meio, empilhados em uma das torres de forma que cada disco se sobrepunha a um disco maior de modo que sempre o disco de cima fosse menor que o disco imediatamente abaixo dele.

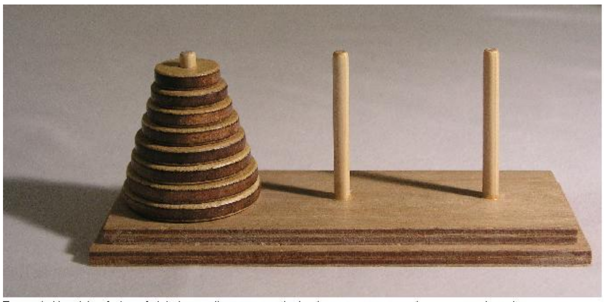
A atribuição que os monges receberam foi a de transferir todos os 64 discos de uma torre para outra, usando a terceira como auxiliar. Apenas 2 regras foram estabelecidas: os monges deveriam movimentar apenas um disco de cada vez e nunca colocar um disco maior sobre um menor.[7]

Os monges foram compelidos a trabalhar com eficiência dia e noite e quando terminasse a tarefa, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria![8]

Muita matéria já foi escrita sobre as Torres de Hanói, desde curiosidades, introdução a novos conceitos matemáticos e até estudos em

[5] S. Y., aluno de Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1998.
[6] Aluno da PUC-SP em aula de Estruturas de Dados do curso de Ciência da Computação, 2004.
[7] C. R. Moraes, *Estruturas de dados e Algoritmos, uma abordagem didática* (São Paulo: Editora Berkeley, 2001), 166-167.
[8] Ibid., 171.

contexto psicogenético no qual se investiga a relação entre ação e compreensão na busca da solução de um problema.[9]



Torres de Hanoi: tarefa: transferir todos os discos para outra haste, um-a-um sem sobrepor um maior sobre um menor

Figura 1: Torres de Hanói com apenas 8 discos (http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Tower_of_Hanoi.jpeg)

ÉDOUARD LUCAS (1842-1891)

Figura 2: Édouard Lucas (http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Elucas_1.png)

Este antigo problema, foi comentado pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891), educado na École Normale em Amiens na França. Após servir durante a guerra Franco-Prussiana de 1870 a 1871 como oficial da artilharia, tornou-se professor de matemática no Lycée Saint Louis em Paris e posteriormente também lecionou matemática no Lycée Charlemagne também em Paris[10].

[9] A. C. Ortega, L. C. M. da Silva & M. A. Fiorot, "O jogo Torre de Hanói em um contexto psicogenético," *ActaScientiarum* 24, (1, 2002): 151-158.
[10] J. O'Connor & E. F. Robertson, "François Edouard Anatole Lucas," *MacTutor History of Mathematics* (dez. 1996): 1.

Lucas foi conhecido pelos resultados obtidos com a teoria dos números, e particularmente por seus estudos sobre a sequência de Fibonacci.[11]

Publicou diversos trabalhos, entre os quais suas famosas, hoje um clássico, Récréations mathématiques, em diversos volumes publicados de 1882 a 1894 sendo alguns postumamente. Nas edições de suas recreações matemáticas, usava o pseudônimo Mandarim N. Claus (note-se que Claus é um anagrama de Lucas)[12]. O problema das Torres de Hanói apareceu em suas Récréations mathématiques – quatrième volume editado em 1883. Posteriormente o quebra-cabeça foi apresentado de forma específica, mais completa e elaborada em 1889, através de sua publicação "Jeux Scientifiques pour servir à l´Histoire, à lÉnseignement et à la Pratique du Calcule et du Dessin – Premiére sèrie nº 3 "[13].

Seu trabalho sobre o problema das Torres foi tão completo, interessante, divertido, esclarecedor e matematicamente tão bem embasado que o tornou conhecido, até os dias de hoje, por pessoas talvez não muito bem informadas nesse aspecto[14], como sendo o "inventor" do quebra-cabeças Torres de Hanói.

A SOLUÇÃO NO FINAL DO SÉCULO XIX

Pelas publicações de Lucas, podemos ter uma idéia dos recursos e raciocínios considerados na época. Sem a disponibilidade de computadores, não dispondo ainda do poder de uma calculadora, mas com uma observação aguçada, os matemáticos já conseguiam grandes avanços na elaboração de algoritmos que apresentam raciocínios e cálculos bastante sofisticados.

Ao apresentar a solução do problema, Lucas sugere um raciocínio simples, empírico e de fácil compreensão: ele analisa o caso de apenas 1

---

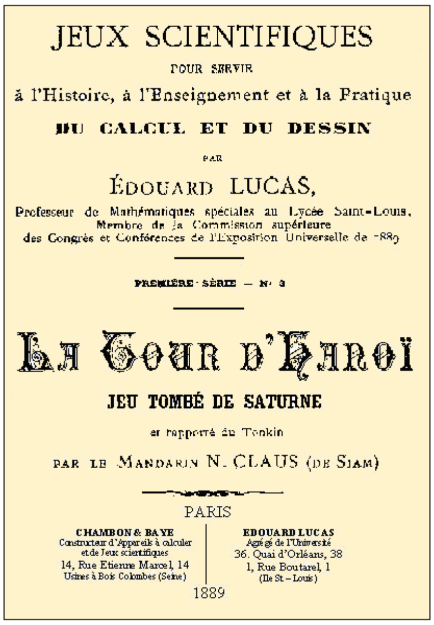
[11] Sequência de Fibonacci : sequência numérica em que cada numero corresponde à soma de seus dois antecessores.

[12] É. Lucas, *Jeux Scientifiques pour servir à l'Histoire, à l'Enseignement et à la Pratique du Calcul et du Dessin- La Tour d'Hanoi* [première serie nº 3] (Paris: Chambon & Baye, 1889), 12.

[13] Ibid., 8.

[14] A. Syropoulos, "The Towers of Hanoi", (Ioannina (Greece: Department of Physics, University of Ioannina, 2007), http://obelix.ee.duth.gr/~apostolo.

disco, depois 2, 3, 4, seguindo até 8 discos, mostrando para cada caso a quantidade mínima de movimentações.



JEUX SCIENTIFIQUES

POUR SERVIR

à l'Histoire, à l'Enseignement et à la Pratique

DU CALCUL ET DU DESSIN

PAR

ÉDOUARD LUCAS,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis,
Membre de la Commission supérieure
des Congrès et Conférences de l'Exposition Universelle de 1889

PREMIÈRE SÉRIE — N° 3

LA TOUR D'HANOÏ

JEU TOMBÉ DE SATURNE

et rapporté du Tonkin

PAR LE MANDARIN N. CLAUS (DE SIAM)

PARIS

CHAMBON & BAYE
Constructeur d'Appareils à calculer
et de Jeux scientifiques
14, Rue Etienne Marcel, 14
Usines à Bois Colombes (Seine)

EDOUARD LUCAS
Agrégé de l'Université
36. Quai d'Orléans, 38
1, Rue Boutarel, 1
(Ile St – Louis)

1889

Figura 3: Publicação parisiense de 1889 (http://edouardlucas.free.fr/pdf/oeuvres/Jeux_3.pdf)

Para o caso de apenas 1 disco:	1	movimento
No caso de 2 discos:	3	movimentos
Para 3 discos:	7	movimentos
Para 4 discos:	15	movimentos
Para 5 discos:	31	movimentos
Para 6 discos:	63	movimentos
Para 7 discos:	127	movimentos
Para 8 discos:	255	movimentos
Etc.		

A seguir, analisando os resultados, observa que ao somarmos 1 a cada um desses números obteremos a serie:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,...

Temos então uma progressão geométrica de razão 2 (cada número é o dobro de seu precedente).

Daí Lucas deduz que: a quantidade mínima de movimentos é dada pela fórmula: $\mathbf{2^n - 1}$, onde n é o número de discos a serem transferidos de uma haste para outra. Portanto, para n=64 discos, teremos: $2^{64} - 1 =$ 18.446.744.073.709.551.615 movimentos, um número incrivelmente alto.

Se os monges fossem rápidos o suficiente para que, em apenas 1 segundo, fizessem uma movimentação, isto levaria cerca de $5 * 10^{11}$ anos! Realmente, seria o fim do mundo, pois seriam 25 vezes a idade do Universo, considerando que hoje estima-se em 20 bilhões de anos: $0.2 * 10^{11}$ essa idade.[15]

Figura 4: "quebra-cabeça" do final do século XIX (http://www.luduscience.pt/images/torre_de_hanoi.jpg)

OS ANAGRAMAS

Como ilustração do espírito jovial e descontraído dessas "recreações" apresentamos a seguir um detalhe sobre a apresentação de resultados incluído por Lucas em seu trabalho[16].

Visando apresentar as movimentações dos discos na forma: AB, BC, CA, etc, onde por exemplo: AB indica: retirar o disco da torre A e colocá-lo na torre B , Lucas prossegue com uma interessante exposição sobre o calculo das permutações possíveis com as letras de um nome, podendo

[15] C. R. Moraes, *Estruturas de dados e Algoritmos, uma abordagem didática* (São Paulo: Editora Berkeley, 2001),171.
[16] Lucas, 8.

com isso formar anagramas como por exemplo nas duas frases seguintes compostas dos mesmos caracteres:

REVOLUTION FRANÇAISE e UN VETO CORSE LA FINIRA

Observe a malícia que está implícita no exemplo acima: "Um veto corse" nos faz lembrar a Napoleão Bonaparte, que governou a França após a revolução francesa e que era de origem corsa.

A APLICAÇÃO DA RECURSIVIDADE NA SOLUÇÃO MODERNA

Hoje, com os computadores disponíveis, a melhor solução para o problema proposto é a recursiva, embora um pouco intrigante e aparentemente de difícil visualização. Existem conceitos importantes que ficam implícitos, o que pode dificultar uma total compreensão da solução.

Seguindo o raciocínio inicial de Lucas, vejamos quais são os nossos passos na busca da solução:

1º) sabemos que para 1 único disco, basta 1 único movimento.

2º) sabemos que se tivermos 2 discos, necessariamente teremos que movimentar o disco superior , que é menor, para uma posição temporária auxiliar, liberando assim o movimento definitivo do disco inferior que é maior.

3º) nesse instante teremos uma situação particular na qual a torre de destino está pronta para receber o maior disco proveniente da torre de origem, ação esta que reduz o problema em 1 disco, considerando que esta ultima movimentação, a do disco maior, foi definitiva.

4º) assim sucessivamente: para movimentarmos 64 discos, teremos que reduzir o problema para 63 discos posicionados na torre auxiliar, liberando assim o maior disco para 1 único e definitivo movimento.

5º) com essa sucessão de reduções do problema sempre de 1 disco a menos, faremos chegar a 1, terminando assim a tarefa.

Resumindo, e raciocinando de outra forma:

Para resolvermos com 64 discos, necessariamente temos que resolver antes para 63 discos.

Para resolvermos com 63 discos, idem para 62, e assim por diante.

Para resolvermos com 2 discos, necessariamente temos que resolver antes para 1 disco.

A solução com apenas 1 disco nós já a temos: basta movimentá-lo para a torre de destino.

Ora, se temos a solução para 1 disco, temos então para 2, 3, 4, assim por diante até os 64 discos. Isto é recursividade.

A SOLUÇÃO DAS TORRES DE HANÓI NO COMPUTADOR:

Por meio das técnicas atuais, torna-se possível listarmos todas as movimentações mínimas e necessárias para transferirmos os 64 discos de uma torre para outra.

Dadas as torres:

A = Torre original com os 64 discos sobrepostos

B = Torre de destino: inicialmente vazia e que receberá os 64 discos de A

C = Torre auxiliar, apenas para armazenamento temporário dos discos

Criamos então o seguinte comando que faz a transferência de todos os 64 discos de A para B usando C, seguindo as regras: 1 disco por vez e nunca sobrepor um menor por um maior.

Transferir (64, A,B,C)

A programação necessária é tão simples que nos faz pensar se está realmente correta:

Transferir (**n**, **origem**, **destino**, **auxiliar**)

Se **n > 1**
Transferir (**n-1**, **origem**, **auxiliar**, **destino**)
Imprimir "Transfira o disco de **origem** para **destino**"
Transferir (**n-1**, **auxiliar**, **destino**, **origem**)

Só isso! Nada mais é necessário programar. Com estas 4 instruções, suportadas por um computador moderno, podemos imprimir uma relação superior a 18 quintilhões, ou mais exatamente 18.446.744.073.709.551.615 frases do tipo:

"Transfira o disco de A para B"
"Transfira o disco de A para C"
"Transfira o disco de B para C"
"Transfira o disco de A para B"
etc....

Observe que sempre o primeiro parâmetro da função **Transferir** acima, assume a **origem**, o segundo sempre o **destino** e o terceiro o **auxiliar**. A troca entre eles em cada chamada da função "Transferir" é que faz a diferença. A constante diminuição da quantidade **n**, leva a um final ao chegar a 1.

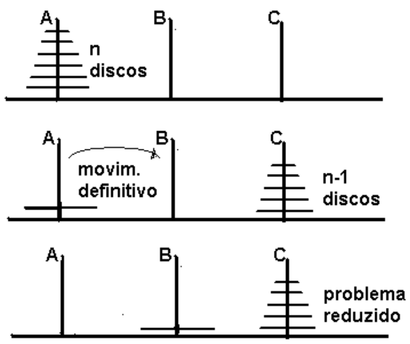


Figura 5: Seqüência básica do raciocínio (imagem nossa)

Note-se também que o comando "**Transferir"** sempre chama 2 vezes ele mesmo. **Isto é recursividade aplicada à programação de computadores**: É daí que vem a potência de 2 na formula do calculo da quantidade de movimentações.

COMENTÁRIOS FINAIS

Um problema proposto, tal qual as famosas e lendárias Torres de Hanói, sempre deve ser um desafio para nós, que nos consideramos seres humanos pensantes e criativos. A questão de encontrar caminhos novos para chegar a soluções, às vezes as mais diversas, é de fundamental importância para aguçar nossa capacidade inventiva e nos reafirmarmos em nossa racionalidade.

No final do século XIX, Édouard Lucas, equacionou entre outros o problema das Torres de Hanói, abrindo novas perspectivas. Apesar do grande desenvolvimento pelo qual passamos desde aquela época, e novas soluções terem surgido, nada nos fará afirmar que tudo já é definitivo, pois a ciência marca sua história, e essa história possui movimento. Cada século que passa transforma ideias, muda possibilidades, exclui hipóteses e cria expectativas, alimentando novas esperanças de um novo amanhã.

SOBRE OS AUTORES:

Eli Banks Liberato da Costa

Mestre em História da Ciência;

Ciência da Computação/Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia/PUCSP